PROBLEMAS RESUELTOS DE APLICACIONES AFINES (II)

TRANSFORMACIONES AFINES EN EL ESPACIO

por

ASCENSIÓN MORATALLA DE LA HOZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE ARQUITECTURA DE MADRID*

3-18-05

PROBLEMAS RESUELTOS DE
APLICACIONES AFINES (II)

TRANSFORMACIONES AFINES EN EL ESPACIO

por

ASCENSIÓN MORATALLA DE LA HOZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-18-05

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Imagen de la portada: Taburetes diseñados por Le Corbusier, reeditados por la firma Cassina.

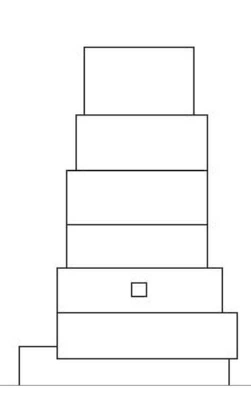
Problemas resueltos de aplicaciones afines (II).
Transformaciones afines en el espacio.

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 389.01 / 3-18-05
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-441-7
ISBN-13: 978-84-9728-444-8
Depósito Legal: M-40265-2012

INTRODUCCIÓN

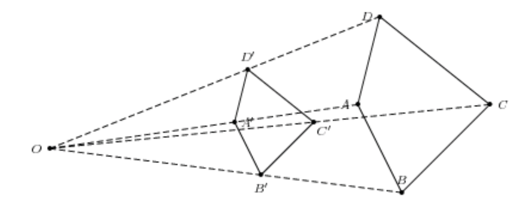
A lo largo de este cuaderno nos centraremos en el estudio de aplicaciones afines **biyectivas** definidas en el espacio afín tridimensional E_3, $f : E_3 \rightarrow E_3$, que llamaremos transformaciones afines. La importancia de este tipo de aplicaciones radica en que permite definir figuras afinmente equivalentes, que tan menudo se usan en representación gráfica.





Los distintos volúmenes que forman el Museo de Arte Contemporáneo de Nueva York son afinmente equivalentes.

Cuando se dibuja un objeto en distintas escalas se está utilizando una transformación afín. Seguramente el lector puede nombrar la aplicación que produce el siguiente efecto sobre el polígono ABCD



Efectivamente es una homotecia de centro O. Las dos figuras son equivalentes porque existe una transformación afín, en este caso una homotecia, que transforma una en otra. Observar que la figura de vértices ABCD se transforma en A'B'C'D' mediante una homotecia *h* de centro O pero también existe otra homotecia, *h'*, en este caso de centro O, que transforma A'B'C'D' en ABCD. Estas dos homotecias están relacionadas: una es la inversa de la otra, es decir $h \circ h' = h' \circ h = id$.

Si quisiéramos hallar la ecuación de una transformación afín, ¿qué elementos tendríamos que conocer?
Dado que estamos estudiando aplicaciones afines en el espacio bastaría conocer el comportamiento de cuatro puntos independientes del espacio, es decir, dados los puntos A, B, C y D del plano bastaría conocer sus imágenes A', B', C' y D' para determinar la ecuación de la aplicación afín. Conocer las imágenes de cuatro puntos nos proporciona información sobre las imágenes de tres vectores linealmente independientes de R^3 y así sabemos cómo se transforman los vectores de una base de R^3 y por tanto determinar la aplicación lineal asociada.

Recordemos que una aplicación afín respecto de una referencia $R=\left(O,B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right)$, se puede expresar con la siguiente ecuación

$$f(X)=b+\widehat{f}(X)$$
$$f(X)=b+NX \quad \text{ó}$$
$$X'=b+NX$$

siendo N la matriz de la aplicación lineal asociada $\widehat{f}$ respecto de la base B y b la imagen del origen de la referencia.
O bien con la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con este enfoque, podríamos plantear el problema de transformar A, B, C y D en A', B', C' y D' respectivamente, con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} B' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} C' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} D' \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escribiendo en una sola ecuación estas expresiones nos queda

$$\begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejando

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

En esta expresión, no olvidar que N es una matriz 3x3.

Las transformaciones biyectivas se reconocen porque el determinante de la matriz de la aplicación lineal asociada es distinto de cero, ya que dicha aplicación lineal es biyectiva.

1. TRASLACIONES

A partir de ahora consideraremos las traslaciones del espacio E_3 respecto de la referencia $R=\left(O,B=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right)$

P1.1 Sea t una traslación de vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\end{pmatrix}$. Determina las ecuaciones de t.

Solución

Geométricamente la traslación mueve el punto X a X' de manera que XX' es el vector v

X $\vec{v}$ X'

$$XX' = \vec{v} \Rightarrow X' - X = \vec{v} \Rightarrow X' = X + \vec{v}$$

Considerando la aplicación identidad $i(X) = IX$, siendo I la matriz identidad de orden 3, podemos reescribir la ecuación como

$$t(X) = \vec{v} + IX$$

$$t(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Tomando $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $t(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 + x_1 \\ y_2 = 3 + x_2 \\ y_3 = -1 + x_3 \end{cases}$$

Estas son distintas formas de expresar la traslación.

Recordamos algunas de las propiedades de las traslaciones en los siguientes problemas

P1.2 Dada la traslación de de vector $\vec{v} = (2,1,1)$. Determina la imagen de la recta $r: \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0 \\ x_2 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$. ¿Es r una recta invariante?

Solución

El vector de dirección de la recta r es $\vec{u} = (2,1,1)$ Esta recta es invariante pues su vector tiene la dirección del vector de traslación.

Si r es una recta paralela a la dirección del vector de traslación, será invariante ya que sus puntos se deslizarán por ella cuando se les aplique la traslación.

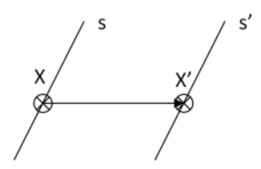
Por tanto $f(r)=r$

P1.3 Sea t una traslación de vector $\vec{v} = (1,3,-1)$. Determina la imagen de la recta $s: \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3 = 0 \end{cases}$. ¿Es s una recta invariante?

Solución

El vector de s es $\vec{u}=(1,-1,1)$, como no es proporcional a $\vec{v}$ la recta s no es invariante.

Si s no es una recta paralela a la dirección del vector de traslación, su imagen será una recta s' paralela a ella que pase por X'.



Tomemos un punto P de s y hallemos su transformado

$$P=(2,0,1)\Rightarrow P'=t(P)=(1,3,-1)+(2,0,1)=(3,3,0)$$

La recta resultante es del tipo

$$s':\begin{cases} x_1+x_2+k_1=0 \\ x_1+2x_2+x_3+k_2=0 \end{cases}$$

Para determinar k_1 y k_2 sustituimos el punto P' en la ecuación anterior y obtenemos los valores de k_1 y k_2

$$\begin{cases} 3+3+k_1=0 \\ 3+2\cdot 3+k_2=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} k_1=-6 \\ k_2=-9 \end{cases}$$

entonces

$$s':\begin{cases} x_1+x_2-6=0 \\ x_1+2x_2+x_3-9=0 \end{cases}$$

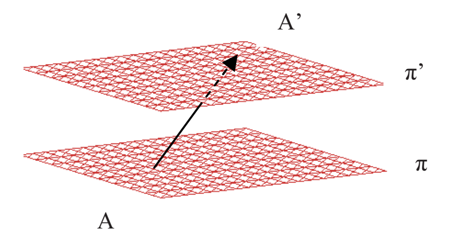
P1.4 Sea t una traslación de vector $\vec{v}=(2,1,0)$. Determina la imagen del plano $\pi: x_1+x_2+x_3+1=0$. ¿Es π un plano invariante?

Solución

En primer lugar comprobamos si el vector de traslación es paralelo a π, sustituyendo $\vec{v}$ en la ecuación de la dirección del plano

$$\left.\begin{array}{l} W_\pi: v_1+v_2+v_3=0 \\ \vec{v}=(2,1,0) \end{array}\right\}\Rightarrow 2+1\neq 0$$

Como vemos no son paralelos entonces la imagen de π es otro plano π' paralelo a π que pasa por el punto *A'*, transformado del punto *A* de π. El plano no es invariante.



Tomemos el punto de π, *A*=(-1,0,0) y calculemos *A'*

$$A=(-1,0,0)\Rightarrow A'=t(A)=(2,1,0)+(-1,0,0)=(1,1,0)$$

Por ser π' paralelo a π escribimos

$$\pi': x_1+x_2+x_3+k=0$$

Como π' pasa por *A'* sustituimos las coordenadas de *A'* en la ecuación anterior

$$1+1+k=0\Rightarrow k=-2$$

por tanto la ecuación de π' es

$$\pi': x_1+x_2+x_3-2=0$$

P1.5 Sea *t* una traslación de vector $\vec{v}=(-2,-3,4)$. Se pide determinar las ecuaciones de la transformación $f\circ t$ siendo *f* la traslación de vector $\vec{u}=(5,7,1)$.

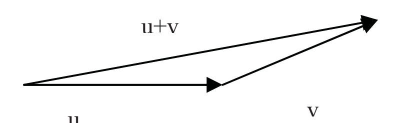
Solución

Vamos a componer dos traslaciones y ver cuál es el resultado final

$$(f\circ t)(X)=f(t(X))=\vec{u}+(\vec{v}+X)=(\vec{u}+\vec{v})+X$$

Por tanto la composición de dos traslaciones es otra traslación de vector la suma de los vectores de traslación de ambas traslaciones:

$$t_u\circ t_v=t_{u+v}$$



El vector de la traslación de *f* es $\vec{u}=(5,7,1)$ y el vector de la traslación de *t* es $\vec{v}=(-2,-3,4)$ la composición de ambas aplicaciones es una traslación de vector

$$\vec{u}+\vec{v}=(5,7,1)+(-2,-3,4)=(3,4,5)$$

$$(f\circ t)(X)=f(t(X))=(3,4,5)+X$$

P1.6 Sea *t* una traslación de vector $\vec{v}=(1,0,3)$, hallar la transformación inversa de *t*.

Solución

La transformación inversa de *t* es otra aplicación biyectiva t^{-1} tal que

$$t^{-1}\circ t=t\circ t^{-1}=id$$

Si $X'=v+X\Rightarrow X=-v+X'$ ecuación que representa a una traslación de vector $-\vec{v}$.

X → X' $\vec{v}$

$-\vec{v}$

$$\left(t_v\right)^{-1} = t_{-v}$$

Por tanto la solución a este apartado es la traslación de ecuación

$$t^{-1}(X) = \left(-1,0,-3\right) + X$$

P1.7 Dada la traslación de ecuación $t(X) = \left(3,1,-1\right) + X$, se pide determinar:

1. Las rectas invariantes.
2. La imagen del plano de ecuación $\pi: 2x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$.
3. La transformación inversa de *t*.
4. las ecuaciones de la transformación $f \circ t$ siendo f la traslación de vector $\vec{u} = (1,2,7)$

Solución

1. El vector de traslación de *t* es $\left(3,1,-1\right)$. Si *r* es una recta paralela a esta dirección será invariante.
2. Si el vector de traslación es paralelo a *π*, el plano será invariante.

$$\left.\begin{array}{l} W_\pi : 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ \vec{v} = \left(3,1,-1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 6 + 1 - 1 \neq 0$$

Este plano no es invariante porque no es paralelo al vector de la traslación. Veamos en qué se transforma π.

Como no son paralelos entonces la imagen de π es otro plano π' paralelo a π que pasa por el punto *A'*, transformado del punto *A* de π.
Tomemos el punto de π, *A*=(-1,0,0) y calculemos *A'*

$$A = \left(2,0,0\right) \Rightarrow A' = \left(2,0,0\right) + \left(3,1,-1\right) = \left(5,1,-1\right)$$

Por ser π' paralelo a π escribimos

$$\pi': 2x_1 + x_2 + x_3 + k = 0$$

Como π' pasa por *A'* sustituimos las coordenadas de *A'* en la ecuación anterior

$$10 + 1 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -10$$

por tanto la ecuación de π' es

$$\pi': 2x_1 + x_2 + x_3 - 10 = 0$$

3. La transformación inversa de t es:

$$\left(t_v\right)^{-1} = t_{-v}$$

Por tanto la solución a este apartado es la traslación de ecuaciones

$$t^{-1}(X) = (-3,-1,1) + X$$

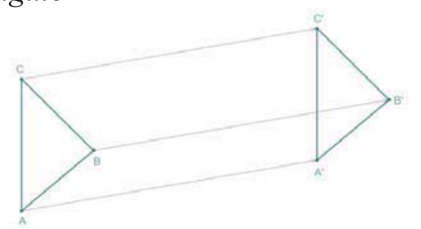
4. Al componer dos traslaciones el resultado es otra traslación: $t_u \circ t_v = t_{u+v}$ entonces

$$(f \circ t)(X) = f(t(X)) = (1,2,7) + (3,1,-1) + X = (4,3,6) + X$$

TRASLACIONES

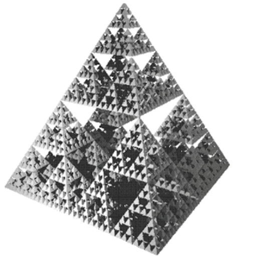
Sean t_u, t_v traslaciones definidas en el espacio E_3 con referencia R. Se cumple:

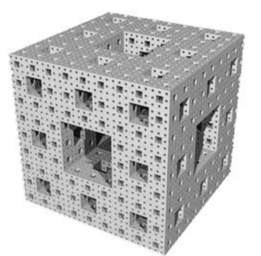
- $t_u \circ t_v = t_{u+v}$
- $(t_v)^{-1} = t_{-v}$
- *Las traslaciones de vector $\vec{u} \neq (0,0,0)$ son transformaciones que no dejan fijos los puntos del plano.*
- *Todas las rectas paralelas al vector de traslación son invariantes.*
- *Todas las rectas no paralelas al vector de traslación se transforman en rectas paralelas a sí mismas.*
- *Todos los planos paralelos al vector de traslación son invariantes.*
- *Todos los planos no paralelos al vector de traslación se transforman en planos no paralelos a sí mismos.*
- *Traslación de un triángulo*



2. HOMOTECIAS

Las siguientes imágenes corresponden al tetraedro de Sierpinski y a la esponja de Menger.





Estas curiosas figuras se han conseguido mediante un proceso iterativo, aplicando una secuencia de homotecias a un tetraedro y un cubo respectivamente. ¿Conoces el término fractal? ¿Y triángulo de Sierpinski? Observa como cada una de las partes que componen

la figura se asemejan a otras partes y a la figura total siguiendo un ritmo de decrecimiento.

Estudiemos las homotecias en el espacio afín tridimensional, E_3, respecto de la referencia $R=\left(O, B=\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}\right)$.

P2.1. Dada la homotecia de centro C=(1,2,7) y razón k=5. Hallar sus ecuaciones.

Solución

Una homotecia de centro C y razón k que transforma X en X'

C X X'

cumple que $CX' = kCX$ por tanto

$$X'-C = k(X-C) \Rightarrow X' = (1-k)C + kX$$

Que podemos escribir, utilizando la aplicación identidad, como

$$X' = (1-k)C + kIX$$

Tomando $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (1-k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

En el caso que nos ocupa

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (1-5)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = -4 + 5x_1 \\ y_2 = -8 + 5x_2 \\ y_3 = -28 + 5x_3 \end{cases}$$

Repasemos algunas propiedades de las homotecias

P2.2. Dada la homotecia h de centro C=(3,-2,1) y razón k=3. Hallar las ecuaciones de h^{-1}.

Solución

La homotecia de centro C y razón k tiene esta ecuación

$$X' = (1-k)C + kX$$

Como $k \neq 0$, despejando X obtenemos la función inversa

$$X = \frac{-(1-k)}{k}C + \frac{1}{k}X'$$

bien

$$X = \left(1 - \frac{1}{k}\right)C + \frac{1}{k}X'$$

Vemos que es una homotecia de razón $\frac{1}{k}$ y centro C

Por tanto la solución a nuestro problema es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Operando

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

P2.3. Hallar la composición de la homotecia h con la homotecia f siendo sus ecuaciones:

$$h: \begin{cases} y_1 = 7 + 3x_1 \\ y_2 = 3 + 3x_2 \\ y_3 = 2 + 3x_3 \end{cases} \qquad f: \begin{cases} y_1 = 1 + 5x_1 \\ y_2 = -2 + 5x_2 \\ y_3 = 1 + 5x_3 \end{cases}$$

Solución

Ecuación de *h:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$

Ecuación de *f:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x_1 \\ 5x_2 \\ 5x_3 \end{pmatrix}$

Componemos $f \circ h$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}\right)$$

Simplificando

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15x_1 \\ 15x_2 \\ 15x_3 \end{pmatrix}$$

Que es la ecuación de una homotecia de razón 15. Calculemos su centro:
Si comparamos la ecuación de la homotecia obtenida con la ecuación general de una homotecia

$$X' = (1-k)C + kX$$

Vemos que

$$(1-15)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Entonces $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 36 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}$ son las coordenadas del centro de la homotecia.

P2.4. Hallar la composición de la homotecia *h* con la homotecia *f*

$$h: \begin{cases} y_1 = 6 + 3x_1 \\ y_2 = 9 + 3x_2 \\ y_3 = 12 + 3x_3 \end{cases} \qquad f: \begin{cases} y_1 = 7 + \frac{1}{3}x_1 \\ y_2 = -4 + \frac{1}{3}x_2 \\ y_3 = 2 + \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

Solución

Ecuación de *h:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$

Ecuación de *f:* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 \\ \frac{1}{3}x_2 \\ \frac{1}{3}x_3 \end{pmatrix}$

Componemos $f \circ h$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}\right)$$

Operamos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Es la ecuación de una traslación de vector (9,-1,6)

Tras observar los resultados de los problemas P2.3 y P2.4 recordamos que la composición de homotecias puede dar lugar a una homotecia, a una traslación o a la identidad.

P2.5. Hallar los puntos fijos de la homotecia de centro (1, 3,-1) y razón 4.

Solución

La ecuación de esta homotecia es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La ecuación que cumplen los puntos fijos es $h(X) = X$, entonces resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = -3 + 4x_1 \\ x_2 = -9 + 4x_2 \\ x_3 = 3 + 4x_3 \end{cases}$$

La solución es $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$ que coincide con el centro de la homotecia.

Esto ocurre para cualquier homotecia. El único punto fijo es su centro.

Si la homotecia cumple que $CX' = kCX$ entonces el punto fijo cumple $CX = kCX$, siendo $k \in R, k \neq 0, k \neq 1$ por tanto $CX = \vec{0}$ luego $X = C$

P2.6. Dada la homotecia *h* de centro (0,1,-2) y razón 3, hallar la imagen de la recta $r: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Solución

Una homotecia de centro C y razón k transforma el punto X de la recta *r,* en el punto X’ también de *r,* cuando la recta *r* contiene al centro de la homotecia.

C X X’

La ecuación de esta homotecia *h* es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Comprobemos si el centro C= (0,1,-2) pertenece a la recta dada:

$$r: \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 - 3 = 0 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$C = (0,1,-2)$$

Como $C \in r$ entonces la recta es invariante

Por tanto *r* se transforma en sí misma, *r* es una recta invariante.

r
C A A'

No existen rectas de puntos fijos pues en el apartado anterior planteamos la ecuación de los puntos fijos y obtuvimos como solución un único punto.
Pero sí hay rectas que se transforman en sí mismas, aquellas que contienen al centro de homotecia.

P2.7. Dada la homotecia *h* de centro (2,-1,2) y razón 6, hallar la imagen de la recta

$$r:\begin{cases} x_1 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{cases}$$

Solución

Primero comprobamos si el centro de la homotecia pertenece a la recta *r* sustituyéndolo en la ecuación de la recta

$$r:\begin{cases} x_1 - x_3 + 1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-2+1 \neq 0 \\ 2-1-3 \neq 0 \end{cases}$$
$$C = (2,-1,2)$$

El centro no pertenece a la recta entonces la recta no se transforma en sí misma.
La ecuación de esta homotecia es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El vector de *r* es $\vec{v} = (1,-1,1)$

Transformamos el punto *A*=(0,3,1) y el vector

$$A' = h(A) = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 23 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \hat{h}(\vec{v}) = 6\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Como el vector $\vec{v}\,'$ es proporcional a $\vec{v}$, resulta que la recta *r'* es paralela a *r*.

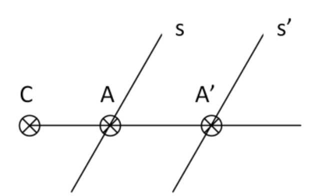
$$r':\begin{cases} x_1 - x_3 + k = 0 \\ x_1 + x_2 + k' = 0 \end{cases}$$

Sustituimos las coordenadas del punto *A'* en *r'* y obtenemos el valor de k

$$\begin{cases} -10 + 4 + k = 0 \\ -10 + 23 + k' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 6 \\ k' = -13 \end{cases}$$

$$r':\begin{cases} x_1 - x_3 + 6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 13 = 0 \end{cases}$$

La recta *r'* es paralela a *r*



P2.8. Dada la homotecia *h* de centro (2,-1,2) y razón 6, hallar la imagen del plano de ecuación $\pi: x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$

Solución

Primero comprobamos si el centro de la homotecia pertenece al plano sustituyéndolo en su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ C = (2,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad 2 - 4 + 2 = 0$$

Como el centro pertenece al plano el plano es invariante es decir $h(\pi) = \pi$

P2.9. Dada la homotecia *h* de centro (2,-1,2) y razón 6, hallar la imagen del plano de ecuación $\pi: x_1 + x_2 + x_3 + 7 = 0$

Solución

La ecuación de la homotecia *h* es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Primero comprobamos si el centro de la homotecia pertenece al plano sustituyéndolo en su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x_1 + x_2 + x_3 + 7 = 0 \\ C = (2,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad 2 - 2 + 2 + 7 \neq 0$$

Como el centro no pertenece al plano el plano no es invariante, $h(\pi)$ resulta un plano paralelo a π

Transformamos el punto *A*=(-7,0,0) de π con la ecuación de *h*

$$A' = h(A) = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Escribimos la ecuación de un plano paralelo a π y sustituimos *A'* en dicha ecuación

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + k = 0 \\ A' = (-52, 5, -10) \end{array}\right\} \Rightarrow -52 + 5 - 10 + k = 0 \Rightarrow k = -57$$

La ecuación de π' es

$$\pi': x_1 + x_2 + x_3 - 57 = 0$$

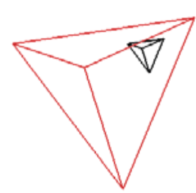
Resumimos lo que sabemos sobre homotecias

HOMOTECIAS

Sea h la homotecia de centro C y razón k con $k \in R, k \neq 0, k \neq 1$ *definida en el espacio afín* E_3 *con referencia* $R = \left(O, B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right)$

- *Si X' es el transformado de X por la homotecia de centro C y razón k se cumple que* $CX' = kCX$.
- *Matricialmente* $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (1-k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
- *La composición de homotecias puede dar lugar a una homotecia, a una traslación o a la identidad.*
- $\left(h_k^{\,C}\right)^{-1} = h_{\frac{1}{k}}^{\,C}$
- *Toda homotecia tiene un único punto fijo, su centro.*
- *Las rectas que contienen al centro de homotecia se transforman en sí mismas.*
- *Las rectas que no contienen al centro de homotecia se transforman en rectas paralelas a ellas.*
- *Los planos que contienen al centro de homotecia se transforman en sí mismos.*
- *Los planos que no contienen al centro de homotecia se transforman en planos paralelos a ellos.*

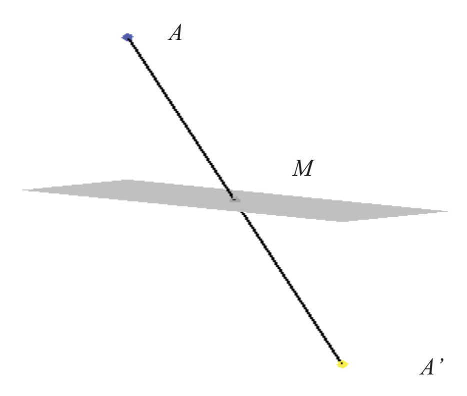
- *Homotecia sobre un tetraedro*



3. SIMETRÍAS OBLICUAS

Una simetría oblicua respecto de un plano π del espacio E_3 es una trasformación que cumple las siguientes condiciones geométricas:

- Dado un punto *A* del plano y su transformado *A'* por la simetría oblicua, el punto medio de *A* y *A'* está en π.
- Los puntos del plano π son puntos fijos. Por tanto los vectores del plano son invariantes, se transforman en sí mismos.



Llamemos *M* al punto medio de *A* y *A'*: $M = \frac{A + A'}{2}$ entonces el vector MA se transforma en el vector $M'A'$

Por ser *M* un punto del plano π este punto *M* es fijo entonces $M'A' = MA'$

Por ser *M* un punto medio de *A* y *A'* se cumple que $MA' = -MA$

Por otro lado los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del plano al ser invariantes cumplen que $\hat{f}(\vec{u}) = \vec{u}$ y $\hat{f}(\vec{v}) = \vec{v}$

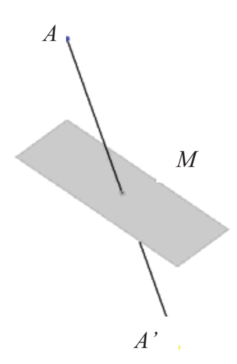
Reuniendo todas estas condiciones tenemos que:

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(MA) = -MA \end{cases}$$

$$f(P) = P \qquad \forall P \in \pi$$

.

P3.1 Hallar la ecuación de la simetría oblicua respecto del plano $\pi : x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ que transforma el punto *A*=(1,1,0) en el punto *A'*=(1,-3,0)



Solución

La ecuación de la aplicación afín es de la forma

$$X' = b + NX$$

Empecemos determinando la matriz *N* de la aplicación lineal asociada. Para ello elijamos dos vectores linealmente independientes de los cuales conozcamos su imagen.

Los vectores $\vec{u} = (0,0,1)$ y $\vec{v} = (3,-1,0)$ del plano cumplen

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ \hat{f}(3\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array}\right\}$$

Por ser una aplicación lineal

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ \hat{f}(3\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ 3\hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{array}\right\} \quad \text{(ec. 1)}$$

El vector *MA* se transforma en el vector *MA'*

$$\hat{f}(MA) = MA' = -MA$$

siendo *M* el punto medio de *A* y *A'*

Hallemos *M*

$$M = \frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\big((1,1,0) + (1,-3,0)\big) = \frac{1}{2}(2,-2,0) = (1,-1,0)$$

$$MA = A - M = (1,1,0) - (1,-1,0) = (0,2,0)$$
$$MA' = A' - M = (1,-3,0) - (1,-1,0) = (0,-2,0)$$

cuyas expresiones respecto de $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de la referencia *R* son

$$MA = 2\vec{e}_2$$
$$MA' = -2\vec{e}_2$$
$$\hat{f}(MA) = MA' \Rightarrow \hat{f}(2\vec{e}_2) = -2\vec{e}_2$$

Por ser aplicación lineal

$$\hat{f}(2\vec{e}_2) = -2\vec{e}_2 \Rightarrow 2\hat{f}(\vec{e}_2) = -2\vec{e}_2 \Rightarrow \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \quad \text{(ec.2)}$$

Recopilando las ecuaciones (ec.1) y (ec.2) tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \\ 3\hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \end{array}\right\}$$

Despejando obtenemos

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_3 \end{cases}$$

Entonces la expresión matricial de la aplicación lineal es

$$\hat{f}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$$

Nos queda determinar *b* de la expresión de la aplicación afín

$$f(X) = b + MX$$

Sabemos que *A* se transforma en *A'* entonces

$$A' = b + MA$$

Sustituyendo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

despejando

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

obtenemos

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Veamos otro planteamiento para este problema

P3.2 Hallar la ecuación de la simetría oblicua respecto de la recta $\pi : x_1 + x_2 - x_3 + 1 = 0$ que transforma el punto *A*=(0,1,1) en el punto *A'*=(0,1,-3).

Solución

Conociendo las imágenes de cuatro puntos independientes podemos resolver el problema como planteábamos al comienzo de este cuaderno.

Si

$$X' = b + NX$$

entonces

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C\,D \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C'\,D' \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Tomemos los puntos *A, B, C* y *M* de manera que sean independientes. *M* es el punto medio de *A* y *A'*, y *B, C* puntos de π tales que *M, B*, y *C* son independientes
Estos puntos se transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A &= (0,1,1) \to A' = (0,1,-3) \\ B &= (2,0,0) \to B' = (2,0,0) \\ C &= (0,2,0) \to C' = (0,2,0) \\ M &= (0,1,-1) \to M' = (0,1,-1) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C\,M \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C'\,M' \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} X$$

P3.3 Dada la simetría oblicua respecto del plano $\pi : x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ que transforma el punto *A*=(1,1,0) en el punto *A'*=(1,-3,0) del ejercicio P3.1, hallar la imagen de la recta $s : \begin{cases} x_1 - 4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Solución

Un punto de la recta *s* es *P*=(4,0,0) y su vector de dirección es $\vec{v} = (0,1,-1)$

Para hallar la imagen de *s* calculamos las imágenes de *P* y $\vec{v}$

$$P' = f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \hat{f}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La recta *s'* pasa por *P'*, su dirección es $\vec{v}\,'$ y su ecuación es

$$s' : \begin{cases} x_1 - 4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Observar que la recta *s* es invariante y paralela a la dirección *AA'*

P3.4 Dada la simetría oblicua respecto del plano $\pi : x_1 + 3x_2 + 2 = 0$ que transforma el punto *A*=(1,1,0) en el punto *A'*=(1,-3,0) del ejercicio P3.1, hallar la imagen de la recta $m : \begin{cases} x_1 - 4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Solución

Un punto de la recta *m* es *P*=(4,0,0,) y su vector de dirección es $\vec{v} = (0, -2, 1)$

Para hallar la imagen de *m* calculamos las imágenes de *P* y $\vec{v}$

$$P' = f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}\,' = \hat{f}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La recta *m'* pasa por *P'*, su dirección es $\vec{v}\,'$ y su ecuación es

$$m' : \begin{cases} x_1 - 4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + 4 = 0 \end{cases}$$

Las rectas *m* y *m'* no son paralelas.

Observar que la recta *m* no es paralela a la dirección *AA'*

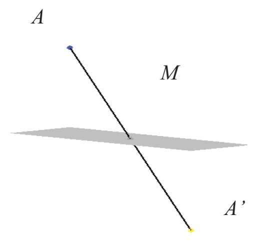
SIMETRÍAS OBLICUAS

Sea f la simetría oblicua respecto del plano $\pi : X = P + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ del espacio E_3, *A punto de plano* E_3, *A' su transformado por f y M el punto medio de A y A', se cumple*

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(MA) = -MA \end{cases}$$

$$f(P) = P$$

- *El plano π es un plano de puntos fijos*
- *Las rectas paralelas al vector AA' son invariantes*



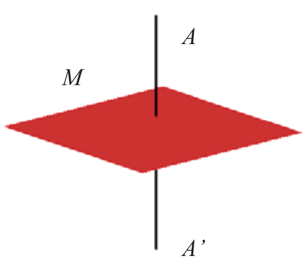
4. SIMETRÍAS ORTOGONALES

Si tuviéramos que asignar un adjetivo a esta imagen de la Menara de Marrakech junto a su reflejo en el agua, diríamos que es una imagen simétrica respecto del plano que contiene al estanque. La simetría a la que nos referimos es la simetría ortogonal respecto a un plano.



Una simetría ortogonal respecto a un plano de E_3 es una trasformación que cumple las siguientes condiciones geométricas:

- Dado un punto *A* de E_3, y su transformado *A'* por la simetría se cumple que el punto medio de *A* y *A'* está en π.
- Los puntos del plano π son puntos fijos.
- El vector ortogonal al plano se convierte en su opuesto.



La simetría ortogonal es un caso particular de simetría oblicua en el que el vector *AA'* es ortogonal a π.
Si π es el plano de E_3 que pasa por *P* y sus vectores de dirección son $\vec{u}$ y $\vec{v}$, llamando $\vec{w}$ al vector ortogonal a ambos se cumple

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{v}) = \vec{v} \\ \hat{f}(\vec{u}) = \vec{u} \\ \hat{f}(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$
$$f(P) = P$$

P4.1 Hallar la ecuación de la simetría ortogonal respecto del plano $\pi : x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0$.

Solución

Los vectores del plano son $\vec{u} = (0,1,-1)$ $\vec{v} = (1,-1,0)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w} = (1,1,1)$ entonces

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

estas ecuaciones nos permiten hallar la matriz *N* de la aplicación lineal asociada tal que

$$X' = b + NX$$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_2) - \hat{f}(\vec{e}_3) = \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1) + \hat{f}(\vec{e}_2) + \hat{f}(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{1}{3}\left(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = \frac{1}{3}\left(-2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \frac{1}{3}\left(-2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3\right) \end{cases}$$

entonces

$$N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

hallemos b de la expresión $X' = b + NX$

Como los puntos del plano son puntos fijos, el punto $P = (2,0,0)$ del plano cumple que:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad b = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X) = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$$

P4.2 Sea f la simetría ortogonal respecto del plano $\pi : x_1 - 3x_2 - x_3 + 1 = 0$ y m la recta de ecuaciones $m : \begin{cases} x_2 - 3 = 0 \\ x_1 - x_3 + 1 = 0 \end{cases}$.

1. Hallar la ecuación de *f.*
2. Hallar las ecuaciones de la recta *f*(*m*).

Solución

1. Los vectores del plano son $\vec{u} = (1,0,1)$ $\vec{v} = (3,1,0)$ y el vector ortogonal al plano es $\vec{w} = (1,-3,-1)$ entonces

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \hat{f}(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

Procediendo como en el ejercicio anterior obtenemos

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{1}{11}\left(9\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = \frac{1}{11}\left(6\vec{e}_1 - 7\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3\right) \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = \frac{1}{11}\left(2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3\right) \end{cases}$$

Utilizamos la condición que los puntos del plano son puntos fijos, para obtener *b*, de la ecuación $X' = b + NX$ Tomando el punto $P = (0,0,1)$ del plano

$$b = \frac{1}{11}\left(-2,6,2\right)$$

La ecuación de *f* es

$$f(X)=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9&6&2\\6&-7&-6\\2&-6&9\end{pmatrix}X$$

2. Un punto de la recta *m* es *P*=(1,3,2) y su vector de dirección es $\vec{v}=(1,0,1)$
Para hallar la imagen de *m* calculamos las imágenes de *P* y $\vec{v}$

$$P'=f(P)=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-2\\6\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9&6&2\\6&-7&-6\\2&-6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-29\\21\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}'=\hat{f}(\vec{v})=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9&6&2\\6&-7&-6\\2&-6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

La recta *m'* pasa por *P'* y su dirección es $\vec{v}'$ que coincide con $\vec{v}$ por ser paralela al plano de simetría

$$m':\begin{cases}x_2-\dfrac{21}{11}=0\\ x_1-x_3+3=0\end{cases}$$

Observar que *π* , *m* y *m'* son paralelos

Estas aplicaciones se tratan con más profundidad en el cuaderno de isometrías

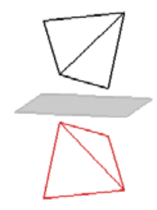
SIMETRÍAS ORTOGONALES

Sea f la simetría ortogonal respecto del plano $\pi: X=P+\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$ del espacio *E*$_3$*, se cumple*

$$\begin{cases}\hat{f}(\vec{u})=\vec{u}\\ \hat{f}(\vec{v})=\vec{v}\\ \hat{f}(\vec{w})=-\vec{w}\end{cases}$$

$$f(P)=P$$

- *El plano π es un plano de puntos fijos*
- *Los planos ortogonales a π son planos invariantes*
- *Las rectas ortogonales a π son rectas invariantes*
- *Las rectas paralelas a π se transforman en rectas paralelas a sí mismas*
- *Los planos paralelos a π se transforman en planos paralelos a sí mismos*



5. ROTACIONES

En estas fotografías de la obra de Félix Candela se aprecia como los paraboloides hiperbólicos se distribuyen en torno a un eje para configurar la cubierta. A partir de uno de ellos y mediante consecutivos giros podríamos obtener la figura completa.



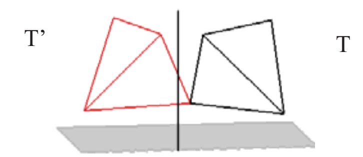


Una rotación alrededor de un eje es una transformación afín del plano y su ecuación es por tanto de la forma

$$f(X) = b + NX$$

La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal eso significa que $\hat{f}$ conserva el producto escalar y su matriz N es ortogonal y regular cumpliéndose que

$$NN^t = I$$
$$\det(N) = 1$$



Estas dos poliedros T y T', están relacionados porque uno es el transformado del otro mediante una rotación, $f(T)=T'$. Tienen la misma forma, cada lado de T mide lo mismo que su transformado, al igual que sus ángulos.
La ecuación de una rotación alrededor del eje OZ y ángulo α es

$$f(X) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

Y se cumple que

$$f(X) = X \quad \forall X \in OZ$$

Es decir el eje de giro es una recta invariante de la transformación.

P5.1 Sea f una rotación alrededor de la recta $r:\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ y ángulo $\alpha = 90^\circ$. Hallar su ecuación.

Solución

La ecuación de un giro de eje *OZ* es

$$G(X)=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0\\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$$

Como la recta *r* es paralela al eje OZ entonces será de la forma

$$f(X)=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0\\ sen(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$$

Es decir es la composición de un giro con una traslación

$$f(X)=(t\circ G)(X)$$

Como el ángulo es de 90º la ecuación queda

$$f(X)=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$$

De los giros sabemos que los puntos del eje de giro son puntos fijos:

$$f(X)=X$$

$$\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$$

Despejando

$$\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$$

La expresión matricial de *f* es

$$f(X)=\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}X$$

P5.2 Sea f la aplicación $f(X)=\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}X$. ¿Es una rotación? En caso afirmativo hallar el eje de rotación.

Solución

Los giros se caracterizan porque la matriz *N* es ortogonal, el determinante de *N* es 1 y tienen una recta de puntos fijos. Comencemos comprobando si la matriz es ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto *N* es ortogonal. Veamos el determinante

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Hallemos los puntos fijos Tomando $X = (x_1, x_2, x_3)$

$$f(X) = X$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De esta expresión se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

O equivalentemente

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{2} \\ x_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ecuaciones cartesianas de una recta paralela al eje *OX*, respecto a la cual se realiza el giro.

P5.3 Expresar en una sola matriz el giro $f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$.

Solución

En ocasiones es útil escribir la ecuación de *f* con una sola matriz de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

P5.4 Se consideran el giro $f(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}X$ y el giro $g(X)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}X$. Hallar la aplicación $f\circ g$ y clasificar.

Solución

$$(f\circ g)(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}X\right]$$

$$(f\circ g)(X)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}X$$

Para clasificar esta isometría comprobamos si la matriz es ortogonal

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&-1&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Por tanto es ortogonal. Veamos el determinante

$$\begin{vmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&-1&0\end{vmatrix}=1$$

Calculemos eje de giro

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X$$

La solución es la recta de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 1 + (\sqrt{2} - 1)k \\ x_3 = (1 - \sqrt{2})k \end{cases}$$

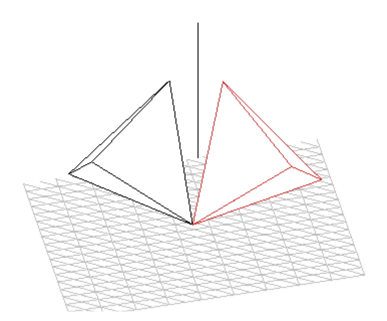
En el cuaderno de isometrías se profundiza en este tipo de aplicaciones

ROTACIONES

Sea f una rotación en E_3 alrededor de la recta r y de ángulo α

- *Su expresión es* $f(X) = b + NX$
- La aplicación lineal asociada es una transformación ortogonal eso significa que $\hat{f}$ conserva el producto escalar y su matriz N es ortogonal $NN^t = I$
- *La aplicación f es biyectiva,* $\det(N) = 1$
- *f transforma puntos en puntos, rectas en rectas y planos en planos.*
- *Los puntos fijos de f son los de r.*
- *Existe la transformación afín inversa para todo giro y es otro giro alrededor de la misma recta y ángulo (-α).*

$$f \circ f^{-1} = Id$$



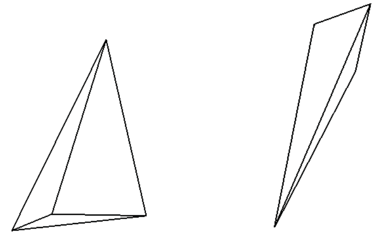
6. TRANSFORMACIONES AFINES EN GENERAL

Observa estos taburetes diseñados por le Corbusier. Geométricamente son poliedros. Estos poliedros aunque son de distintas dimensiones, desde un punto de vista geométrico son afinmente equivalentes porque podemos pasar de un modelo al otro a través de una transformación afín.



Veamos algunas transformaciones afines del espacio E_3.

P6.1. Hallar la ecuación de la aplicación afín que transforma el poliedro de vértices en los puntos A=(1,1,1), B=(2,3,4), C=(2,0,1), D=(1,0,1) en el poliedro de vértices A'=(-3,-2,0), B'=(9,1,1), C'=(0,-1,0), D'=(0,0,1)



Solución

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} A' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} B' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} D' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ 1 \end{pmatrix}$$

Y por tanto

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' & C' & D' \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

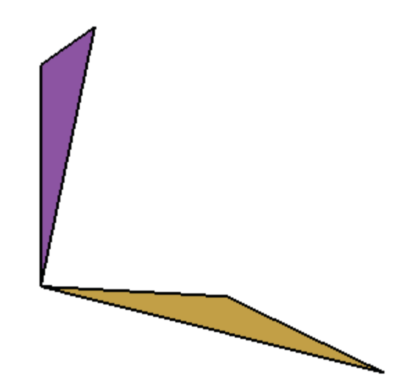
En nuestro caso las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & -1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b=\begin{pmatrix}-6\\-\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},\qquad N=\begin{pmatrix}0&-3&6\\-1&-2&\frac{8}{3}\\-1&-1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$f(X)=\begin{pmatrix}-6\\-\frac{5}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-3&6\\-1&-2&\frac{8}{3}\\-1&-1&\frac{4}{3}\end{pmatrix}X$$

P6.2. Hallar la ecuación de la aplicación afín que transforma el triángulo de vértices en los puntos *A*=(4,1,1), *B*=(4,1,5), *C*=(2,1,5), en el triángulo de vértices *A'*=*A*, *B'*=(4,9,1), *C'*=(3,4,1) y el punto *D*=(2,0,0) en *D'*=(1,0,0).



Solución

La expresión de la aplicación lineal es

$$X'=b+NX$$

Calculamos primero la matriz de la aplicación lineal, *N*. Para ello necesitamos conocer las imágenes de tres vectores linealmente independientes.

$$A=(4,1,1), B=(4,1,5)\rightarrow AB=B-A=(0,0,4)$$
$$A=(4,1,1), C=(2,1,5)\rightarrow AC=C-A=(-2,0,4)$$
$$A=(4,1,1), D=(2,0,0)\rightarrow AD=D-A=(-2,-1,-1)$$

AB, *AC* y *AD* son vectores linealmente independientes

$$A'B'=B'-A'=(0,8,0)$$
$$A'C'=C'-A'=(-1,3,0)$$
$$A'D'=D'-A'=(-3,-1,-1)$$

Sus imágenes son *A'B'*, *A'C'* y *A'D'* respectivamente

$$\hat{f}(AB) = A'B'$$
$$\hat{f}(AC) = A'C'$$
$$\hat{f}(AD) = A'D'$$

Por tanto

$$\begin{cases} \hat{f}(4\vec{e}_3) = 8\vec{e}_2 \\ \hat{f}(-2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \hat{f}(-2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

Por ser $\hat{f}$ aplicación lineal

$$\begin{cases} 4\hat{f}(\vec{e}_3) = 8\vec{e}_2 \\ -2\hat{f}(\vec{e}_1) + 4\hat{f}(\vec{e}_3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ -2\hat{f}(\vec{e}_1) - \hat{f}(\vec{e}_2) - \hat{f}(\vec{e}_3) = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \hat{f}(\vec{e}_1) = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{5}{2}\vec{e}_2 \\ \hat{f}(\vec{e}_2) = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \hat{f}(\vec{e}_3) = 2\vec{e}_2 \end{cases}$$

La matriz de la aplicación lineal asociada es

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ \frac{5}{2} & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sólo nos queda calcular *b*

$$X' = b + NX \Rightarrow b = X' - NX$$

Sustituyendo *D* y *D'* en la ecuación anterior

$$b=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & 0\\ \frac{5}{2} & -6 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}$$

La ecuación de *f* es

$$f(X)=\begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 2 & 0\\ \frac{5}{2} & -6 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}X$$

P6.3 Sea f la transformación $X'=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -5 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}X$ ¿Tiene puntos fijos?

Solución

Planteamos la ecuación de los puntos fijos

$$f(X)=X$$

$$b+NX=X\Rightarrow b=X-NX\Rightarrow b=IX-NX\Rightarrow b=(I-N)X$$

$$(N-I)X=-b$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es

$$\begin{pmatrix}1-1 & 1 & 1\\ 2 & -5-1 & -1\\ 2 & 1 & 3-1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & -6 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 3, y el rango de la matriz ampliada es 3 el sistema es compatible determinado por tanto tiene solución única, lo cual significa que tiene un único punto fijo.

La solución de este sistema de ecuaciones es $P=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

P6.4 Sea f la transformación $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} X$. Hallar la transformación inversa de *f*.

Solución

Una forma cómoda de resolver esta cuestión es utilizar la siguiente expresión de f

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 & -4 \\ 8 & -1 & -3 & 2 \\ -12 & -1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1}(Y) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 14 & 2 & -4 \\ 8 & -1 & -3 \\ -12 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Si componemos f con g obtenemos la aplicación identidad

$$(f^{-1} \circ f)(X) = X$$

TRANSFORMACIONES AFINES

Sea f la transformación afín del espacio E_3 de ecuación $f(X) = b + NX$:

- *La aplicación lineal asociada es* $\hat{f}(X) = NX$
- *La imagen del origen de la referencia R es b*
- *Si f tiene puntos fijos cumplen la ecuación* $f(X) = X$
- *La aplicación f es biyectiva si* $\det(N) \neq 0$
- *Las transformaciones afines transforman rectas en rectas, planos en planos.*
- *Dados cuatro puntos independientes A, B, C, D y sus imágenes por f, A', B', C', D', se cumple:*

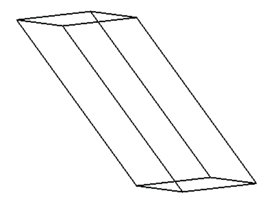
$$\begin{pmatrix} N & b \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C\,D \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & C'D' \\ 1 & 1 & 1\;1 \end{pmatrix}^{-1}$$

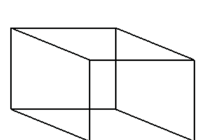
- *Dados tres vectores linealmente independientes* $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ *cuyas imágenes por* $\hat{f}$ son $\vec{u}\,'$, $\vec{v}\,'$ y $\vec{w}\,'$ *se cumple*

$$N = \begin{pmatrix} \vec{u}\,' & \vec{v}\,' & \vec{w}\,' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{pmatrix}^{-1}$$

- *El conjunto de las aplicaciones afines biyectivas forman un grupo con la operación composición de aplicaciones, es decir:*
  1. *La composición de transformaciones afines es una transformación afín.*
  2. *La composición de transformaciones afines es asociativa.*
  3. *Existe la transformación afín inversa para toda transformación afín.*
  4. *La transformación identidad* $f(X) = X$ *es una transformación afín.*

Figuras afinmente equivalentes





CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

